Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MA1116. Matemáticas III.

GUIA 7: **Espacios vectoriales**

1. Sea $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores arbitrarios de un espacio vectorial V, y a y b dos escalares cualesquiera. Demostrar que
$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v} \text{ si, y sólo si, } a = b \text{ ó } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

2. Diga si en $\mathbb{R}^2$ se define la suma $(x, y) + (a, b) = (x + a,\ y + b)$ y el producto por un escalar $\lambda(x, y) = (0, \lambda b)$ define un espacio vectorial.

3. Comprobar la unicidad del del vector nulo y del vector opuesto, de la definición de espacio vectorial.

4. Demuestre que en todo espacio vectorial se cumple que $-\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Cita todos los axiomas de la definición de espacio vectorial.

5. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacio vectoriales.
   (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x + y = 0\}$.
   (b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x - y = 4\}$.
   (c) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + 2z = 0,\ x - y = 0\}$.
   (d) $F = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 0,\ x - z = 1\}$.
   (e) $S = \{(x, -x, -x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.
   (f) $T = \{(2y + z,\ y,\ z) : \ y,\ z \in \mathbb{R}^2\}$.
   (g) El conjunto de los polinomios de grado cuatro y el polinomio nulo.
   (h) Los polinomios con raíz en a.
   (i) Los polinomios que satisfacen $4p(1) + p(2) = 3$.
   (j) $P = \{p(x) = ax^2 + bx + c : \ p(3) = 2\}$.
   (k) $H = \left\{A \in M_{2\times 2} : \ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
   (l) $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} : \ a + b + c = 0,\ c + d = 0\right\}$.
   (m) $H = \{A \in M_{2\times 2} : \ AB = A\}$, B fija.
   (n) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ -a + 3c = 0\}$.
   (o) $W = \{A \in M_{3\times 3} : A = A^{-1}\}$.
   (p) $W = \{A \in M_{3\times 3} : A^2 = I\}$.
   (q) $W = \{A \in M_{3\times 3} : A \text{ es triangular inferior}\}$
   (r) $\{f \in C^1[0, 1] : \ f'(x) = 0\}$.

6. Comprobar que el conjunto de matrices de tamaño 3×3 tal que su traza es cero es un subespacio del espacio de las matrices de tamaño 3×3.

7. Comprobar que

   (a) $\text{gen}\{(1,2,1),\, (0,1,0)\} = \text{gen}\{(1,3,1),\, (1,0,1)\}$

   (b) $\text{gen}\{(2,1,3),\, (0,1,1)\} = \text{gen}\{(2,2,4),\, (2,-1,1)\}$

8. Decir si son ciertas las siguientes igualdades,

   (a) $\text{gen}\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\mathbf{w},\, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\} = \text{gen}\{\mathbf{v}-2\mathbf{w},\, \mathbf{u},\, 3\mathbf{u}+2\mathbf{v}+2\mathbf{w}\}$.

   (b) $\text{gen}\{\mathbf{u},\, \mathbf{u}+\mathbf{v},\, 3\mathbf{u}+2\mathbf{v}\} = \text{gen}\{2\mathbf{u}+2\mathbf{v},\, \mathbf{v}\}$.

9. Probar que $\{x-1,\, x+1,\, x^2\}$ es un conjunto generador de $\mathbf{P}_2$.

10. Probar que los vectores $(1,-1,1)$, $(0,-1,2)$ y $(2,1,1)$ forman un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.

11. Probar que los vectores $(1,-1,2)$, $(3,2,-4)$ y $(0,2,-4)$ es generador del subespacio de $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, -y = 2z\}$.

12. Encuentre el valor de a para que los vectores siguientes sean linealmente independientes,

    (a) $\{(a,1,0),\, (1,a,1),\, (0,1,a)\}$

    (b) $\{(a,1,1),\, (1,1,a),\, (3,1,1)\}$

13. Considere el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$. Probar que los polinomios $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ y $p'''(x)$ son linealmente independiente.

14. Sean A y B dos matrices de $M_{n\times n}$, distinta de la matriz nula. Demostrar que si A es simétrica y B es antisimétrica, son linealmente independientes.